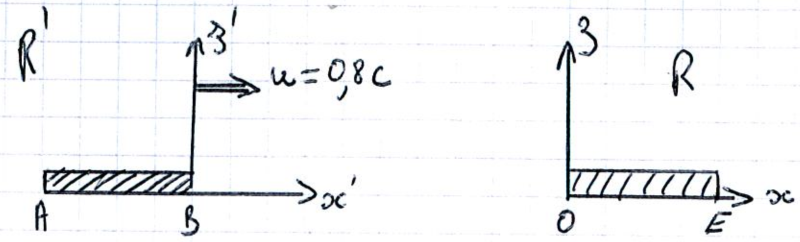
Exercices A]

Ex 1 : Changement de chronologie de deux évènements



$L_{p\,AB} = L_{p\,OE} = L = 1m$

E_1 : évènement origine (O et B coïncident)

E_2 : O et A coïncident

E_3 : evt qd E et B coïncident.

$E_1 \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right._R \qquad E_1 \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right._{R'}$

1] E_2 (O et A coïncident) $\qquad E_2 \left| \begin{matrix} x_2 = 0 \\ 0 \\ 0 \\ ct_2 \end{matrix} \right._R \qquad E_2 \left| \begin{matrix} x'_2 = -L \\ 0 \\ 0 \\ ct'_2 \end{matrix} \right._{R'}$

Calcul de ct_2 et ct'_2 $\Rightarrow x'_2 = \gamma_e(\cancel{x_2} - \beta_e ct_2) \Rightarrow ct_2 = \dfrac{x'_2}{-\beta_e\gamma_e} = \dfrac{L}{\gamma_e\beta_e}$

$\Rightarrow ct'_2 = \gamma_e(ct_2 - \cancel{\beta_e x_2}) \Rightarrow ct'_2 = \dfrac{L}{\beta_e}$

⚠ invariant

intervalle ds R $\quad s_{12}^2 = (ct_2)^2 - x_2^2 = (ct_2)^2 = \dfrac{L^2}{\gamma_e^2\beta_e^2}$

$\quad \parallel$

intervalle ds R' $\quad s_{12}^2 = (ct'_2)^2 - x_2'^2 = \dfrac{L^2}{\beta_e^2} - L^2 = L^2\left(\dfrac{1}{\beta_e^2} - 1\right) = \dfrac{L^2}{\gamma_e^2\beta_e^2} > 0$ intervalle genre temps

INVARIANT

AN : $\beta_e = 0,8 \qquad \gamma_e = 1,667 \qquad L = 1m$

$E_2 \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,75 \end{matrix} \right._R \qquad E_2 \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1,25 \end{matrix} \right._{R'} \qquad s_{12}^2 = 0,75^2 = 0,5625\,m^2$

2) Intervalle E_3 (E et B coïncident).

$$E_3 \begin{vmatrix} x_3 = L \\ 0 \\ 0 \\ ct_3 \end{vmatrix}_R \qquad E_3 \begin{vmatrix} x'_3 = 0 \\ 0 \\ 0 \\ ct'_3 \end{vmatrix}_{R'}$$

calcul de ct_3 et ct'_3 $\Rightarrow$ $x_3 = \gamma_e(\cancel{x'_3} + \beta_e ct'_3) \Rightarrow L = \gamma_e \beta_e ct'_3 \rightarrow ct'_3 = \frac{L}{\gamma_e \beta_e}$

$ct_3 = \gamma_e(ct'_3 + \beta_e \cancel{x'_3}) \quad ct_3 = \frac{L}{\beta_e}$

(ds R ou R') $\quad s_{13}^2 = (ct'_3)^2 = \frac{L^2}{\gamma_e^2 \beta_e^2}$

$$E_3 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1{,}25 \end{vmatrix}_R \qquad E_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}75 \end{vmatrix}_{R'} \qquad s_{13}^2 = 0{,}5625\ m^2.$$

3) Comparaison de la chronologie entre les 3 événements

dans R $\quad E_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad E_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 0{,}75 \end{vmatrix} \quad E_3 \begin{vmatrix} 1 \\ 1{,}25 \end{vmatrix} \quad ct_2 < ct_3$

dans R' $\quad E_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad E_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 1{,}25 \end{vmatrix} \quad E_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 0{,}75 \end{vmatrix} \quad ct'_2 > ct'_3$

} inversion de chronologie.

$$s_{23}^2 = c^2(t_3 - t_2)^2 - (x_3 - x_2)^2 = \cancel{c^2}\left(\frac{L^2}{\cancel{c^2}\beta_e^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma_e}\right)^2\right) - L^2$$

$$= \frac{L^2}{\beta_e^2 \gamma_e^2}(\gamma_e - 1)^2 - L^2$$

AN: $s_{23}^2 = -0{,}75\ m^2$ $\rightarrow$ intervalle genre espace $\Rightarrow$ pas de causali

CORRIGÉ

I^e question. — Energie coulombienne W_c.

Première méthode. On utilise la relation :

$$W_c = \frac{1}{2} \iiint V \, dq \qquad (1)$$

qui donne l'énergie dépensée lors de la mise en place des différentes charges d'un système, V désignant le potentiel à l'endroit où se trouve la charge dq et l'intégrale étant étendue à la distribution de charges.

Il nous faut donc établir l'expression du potentiel coulombien à la distance r du centre d'une sphère de rayon R uniformément chargée avec la densité ρ.

Appliquons le théorème de Gauss à une sphère de rayon r :

$$4 \pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

d'où l'expression du champ électrique

$$E(r) = \frac{r \rho}{3 \varepsilon_0}$$

Le potentiel V (r) à la distance r du centre est tel que

$$\int_{r=0}^{r} E(r) \, dr = V_0 - V(r)$$

V_0 désignant le potentiel au centre de la sphère qui a pour valeur :

$$V_0 = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_0^R \frac{4 \pi r^2 \rho}{r} dr = \frac{R^2 \rho}{2 \varepsilon_0}$$

d'où finalement :

$$V(r) = \frac{\rho}{2 \varepsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \qquad (2)$$

La relation (1) prend alors la forme :

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{\rho}{2 \varepsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) 4 \pi r^2 \rho \, dr$$

soit, compte tenu de $\rho = \frac{3 Ze}{4 \pi R^3}$:

$$\boxed{W_c = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z^2 e^2}{4 \pi \varepsilon_0 R}} \qquad (3)$$

Seconde méthode. — Supposons que nous ayions déjà construit une sphère de rayon r. Le potentiel à la surface de cette sphère est analogue à celui qui résulterait de la concentration de toute la charge au centre soit

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot \frac{1}{r} = \frac{r^2 \rho}{3\varepsilon_o}$$

Ajoutons maintenant une pellicule chargée d'épaisseur dr sur cette sphère; le travail à fournir est

$$d\,W_c = \frac{r^2 \rho}{3\varepsilon_o} \cdot 4\pi r^2 \rho\, dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_o} r^4\, dr$$

En intégrant cette expression de 0 jusqu'à R et en remplaçant ρ par sa valeur on obtient comme plus haut :

$$W_c = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_o R}.$$

Puisque R est le même pour des noyaux isobares, la différence d'énergie coulombienne entre 2 isobares de charges Z et Z − 1 sera :

$$W_c(Z) - W_c(Z-1) = \Delta W_c = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R}(2Z-1) \qquad (4)$$

2^e question. — Energie au repos des noyaux X *et* Y.

Elle peut être écrite respectivement :

$$\left.\begin{aligned} M_X c^2 &= [Z\,M_P + (A-Z)\,M_n]\,c^2 - B_X \\ M_Y c^2 &= [(Z-1)\,M_P + (A-Z+1)\,M_n]\,c^2 - B_Y \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

avec M_p et M_n : masses au repos du proton et du neutron, B_X et B_Y : énergies positives de liaison des noyaux.

Les 2 noyaux considérés étant des noyaux miroirs nous avons

$$A = Z + (Z-1) = 2Z - 1$$

D'autre part l'énergie de liaison B d'un noyau peut être décomposée en 2 termes :

$$B = B_{nucl.} + B_{coul}$$

avec :

$B_{nucl.}$: terme positif qui résulte des forces attractives spécifiquement - nucléaires s'exerçant entre les nucléons.

$B_{coul.}$: terme correctif négatif provenant de la répulsion coulombienne entre protons.

Les relations (5) permettent donc d'écrire :

$$(M_X - M_Y)\,c^2 = (M_P - M_n)\,c^2 + (B_Y - B_X)_{nucl.} + (B_Y - B_X)_{coul.} \qquad (6)$$

D'après le principe d'Indépendance de charge, l'intensité de la force nucléaire entre 2 nucléons est indépendante de la charge des nucléons considérés. Les noyaux X et Y étant constitués d'un même « cœur » de Z − 1 protons et Z − 1 neutrons auquel on a ajouté 1 proton pour avoir X et 1 neutron pour avoir Y, on peut donc admettre que pour ces deux noyaux, considérés dans leur état fondamental, la différence $(B_Y - B_X)_{nucl.}$ est nulle.

Le résultat de la première question donne d'autre part, en faisant attention au signe :

$$(B_Y - B_X)_{coul.} = -\,[W_c(Z-1) - W_c(Z)] = \Delta W_c.$$

Compte tenu du fait que $R = R_o A^{1/3}$ et que $A = 2Z - 1$ pour les noyaux considérés la relation (6) s'écrit finalement

$$\boxed{(M_X - M_Y)\,c^2 = (M_P - M_n)\,c^2 + \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2 A^{2/3}}{4\pi\varepsilon_o R_o}} \qquad (7)$$

3^e question. — Transition β⁺ :

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \beta^+ + \nu_e$$

Pour un noyau résiduel formé dans l'état fondamental, compte tenu du fait que la masse au repos du neutrino est nulle et que l'énergie cinétique emportée par le noyau résiduel est toujours négligeable, la conservation de l'énergie totale dans le processus β^+ s'écrit (*)

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + m_e c^2 + T_{\beta+} + T_\nu \qquad (8)$$

(*) Voir Problème n° : 17.

avec

T_{β^+} : énergie cinétique emportée par le positon;

T_ν : énergie emportée par le neutrino;

$m_e c^2$: énergie au repos de l'électron.

La somme $T_{\beta^+} + T_\nu$ est constante et égale à T_{max}, le positon emportant toute l'énergie disponible lorsque le neutrino n'emporte rien. La relation (8) permet donc d'écrire :

$$\boxed{(M_X - M_Y)\,c^2 = T_{max} + m_e c^2} \qquad (9)$$

4ᵉ question.

Des relations (7) et (9) on déduit immédiatement :

$$R_o = \frac{b}{T_{max} + a}\,A^{2/3} \quad \text{avec} \quad a = m_e c^2 + (M_n - M_p)\,c^2, \quad b = \frac{3}{5}\,\frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_o}$$

Application numérique. — $a = 0{,}511 + (1{,}008\,665\,4 - 1{,}007\,276\,63) \times 931{,}480 = 1{,}8$ MeV.

La dimension de b est : Energie × Longueur. Exprimons b en MeV × Fermi :

$$b = \underbrace{\frac{3}{5}\,(1{,}6\,10^{-19})^2 \times 9\cdot 10^9}_{\text{valeur de b en Joule} \times \text{mètre}} \times \underbrace{\frac{1}{1{,}6\,10^{-13}}}_{\substack{\text{conversion}\\ \text{Joule} \to \text{MeV}}} \times \underbrace{\frac{1}{10^{-15}}}_{\substack{\text{conversion}\\ \text{Mètre} \to \text{Fermi}}}$$

d'où

$$b = 0{,}864 \text{ MeV} \times \text{Fermi}$$

et la relation demandée s'écrit

$$\boxed{R_o = \frac{0{,}864\,A^{2/3}}{T_{max} + 1{,}8} \quad \begin{matrix} R_o \text{ en Fermi} \\ T_{max} \text{ en MeV} \end{matrix}} \qquad (10)$$

5ᵉ question.

Chaque noyau émetteur β^+ du tableau constitue avec le noyau résiduel de la désintégration une paire de noyaux miroirs. La relation (10) est applicable. En respectant l'ordre du tableau on obtient successivement les valeurs suivantes pour R_o :

1,55; 1,60; 1,48; 1,61; 1,53; 1,53; 1,46; 1,47; 1,39; 1,42; 1,38; 1,41; 1,37; 1,39; 1,36; 1,39.

d'où l'on tire

$$\underline{\overline{R}_o = 1{,}45 \text{ Fermi}}$$

L'excellent accord entre la valeur moyenne précédente et la valeur $R_o \simeq 1{,}5$ Fermi permet de conclure que les hypothèses du calcul doivent correspondre à la réalité, au moins en première approximation, soit :

— Validité de la relation $R = R_o\,A^{1/3}$ traduisant le fait que le volume du noyau est proportionnel au nombre de nucléons qu'il contient : « modèle à masse spécifique constante ».

— Distribution uniforme de la charge électrique à l'intérieur du noyau.

— Indépendance de charge des forces nucléaires.

Le rayon des noyaux varie donc en gros de 1,5 à 10 Fermis lorsque A varie de 1 à 250 et il est bon de rappeler que le rayon des atomes correspondants est environ 10^4 fois plus grand ce qui permet d'affirmer que le vide occupe la presque totalité de la matière.